INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

Association d'education
Organisme d'interêt general à caractere educatif
Etablissement libre d'enseignement superieur

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988 (Toutes options)

M A T H E M A T I Q U E S II

DUREE : 3 heures - COEFFICIENT : 4
COEFFICIENT :5 (réservé au BAC technique)

AVERTISSEMENT

On rappelle aux candidats les termes du programme concernant la réduction des endomorphismes et des matrices carrées en algèbre linéaire, en vigueur pour l'année 1987-88 :

> La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres s'effectue, par résolution sur chaque exemple, des équations $u(x) = \alpha x$ ou $A(X) = \alpha X$; la notion de polynôme caractéristique n'est pas au programme.

On se propose, dans les parties I et II, d'effectuer de telles recherches en tirant le meilleur parti des singularités rencontrées. Enfin, dans la partie III ,après avoir étendu les notions de valeur propre et de vecteur propre à un endomorphisme d'espace vectoriel de fonctions, on guide les recherches de tels éléments dans l'exemple donné.

NOTATIONS

Pour n entier naturel (n=3 ou n=4 dans le problème), on désigne par B_n la base canonique de R^n : $B_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

$M_n(R)$ est l'algèbre des matrices carrées à éléments dans R.

A un endomorphisme u de R^n on associe sa matrice A dans B_n.

On dit que u (et donc A) est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de u.

Enfin pour unifier les notations :

- dans le cas n=3 on écrira (x,y,z) les composantes d'un vecteur propre dans R^3
- dans le cas n= 4 on écrira (x,y,z,t) les composantes d'un vecteur propre dans R^4.

PARTIE I CALCUL PAR RESOLUTION DE SYSTEMES

-------- A --------

Soit u l'endomorphisme de R^4 dont la matrice dans la base B_4 s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Ecrire le système qui permet de déterminer les vecteurs propres de u associés à une valeur propre α.

2°) Résoudre ce système et montrer qu'il existe 4 valeurs propres distinctes; pour chacune d'elles on caractérisera les vecteurs propres par leurs composantes dans B_4.

3°) u est-il diagonalisable ?

------ B ------

On considère l'endomorphisme u de R^3 dont la matrice dans la base B_3 est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Ecrire le système qui permet de calculer les vecteurs propres de u, associés à une valeur propre α.

Résoudre ce système (en discutant selon les valeurs de k) dans le cas $\alpha=2$.

2°) Discuter selon les valeurs de k, l'existence de valeurs propres réelles, distinctes de 2, et le cas échéant déterminer soigneusement les vecteurs propres correspondants.

3°) Présenter les résultats obtenus en discutant selon les valeurs de k. On séparera les cas k>0, k=0, k<0.

4°) Pour quelles valeurs de k u est-il diagonalisable ?

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II UTILISATION DU RANG ET DU NOYAU DE u

------ A ------

Soit u l'endomorphisme de R^4 dont la matrice A dans la base B_4 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Quel est le rang de A.

En déduire la dimension du noyau de u (Keru). Donner, sans calculs, à l'aide des vecteurs de B_4, une base de ce noyau. Interprétez ce résultat en termes de valeurs propres et de vecteurs propres.

2°) Ecrire le système donnant les composantes des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle α de u. Le résoudre et montrer en particulier qu'il existe deux valeurs propres non nulles, pour lesquelles on donnera les composantes de vecteurs propres correspondants.

3°) u est-il diagonalisable ?

------ B ------

Soit a, b, c trois réels tels que : $a^2 + b^2 + c^2 = k$ avec $k \neq 0$
u est l'endomorphisme de R^3 ont la matrice dans la base B_3 est :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1°) Quel est le rang de A ?

2°) Déterminer le noyau et l'image de u. Donner une base du noyau et de l'image.

3°) Montrer qu'il existe une valeur propre non nulle. Quels sont les vecteurs propres correspondants?

4°) u est-il diagonalisable ?

PARTIE III ETUDE D'UN ENDOMORPHISME DE FONCTIONS

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $I = [0, +\infty[$ et par u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction u(f) = g définie sur I par :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = f(0)$$

1°) Montrer que g est continue sur $]0, +\infty[$ et que $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

En déduire que u est un endomorphisme de E.

2°) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

3°) S'il existe α réel et $f \in E$, non nulle, tels que $u(f) = \alpha f$, on dira que f est un vecteur propre de u associé à la valeur propre α. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de u.

4°) Soit α une valeur propre non nulle de u et $f \in E$ un vecteur propre associé

a) Montrer que f est nécessairement dérivable sur $]0, +\infty[$ et trouver une relation entre k' et k, k désignant la restriction de f à $]0, +\infty[$ et k' la fonction dérivée de k sur $]0, +\infty[$.

b) En posant $h(x) = x^{(1-1/\alpha)}\,k(x)$, montrer que h est nécessairement constante sur $]0, +\infty[$

c) A quelle condition nécessaire sur α, k est-elle effectivement la restriction d'une fonction f, continue sur I.

d) Conclure en donnant les valeurs propres de u et pour chacune d'elles les vecteurs propres associés.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail